Lineare Algebra

Eigenwerte und Eigenvektoren

Lineare Algebra

Eigenwerte und Eigenvektoren

Inhalt

Übersicht:

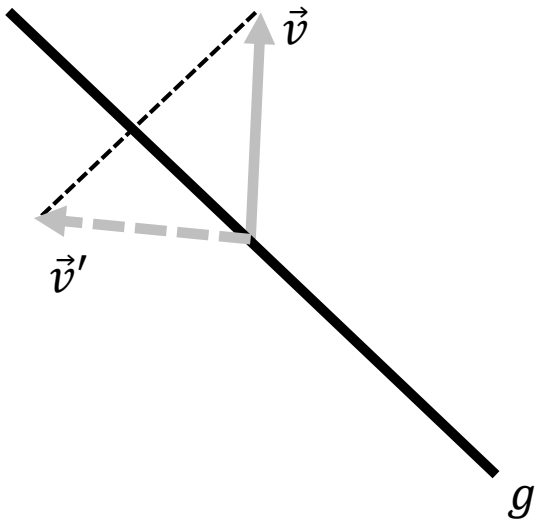
- Einführungsbeispiel
- Definition
- Berechnung
- Anwendungsbeispiele
- nützliche Eigenschaften
- Näherungsweise Bestimmung

Einführungsbeispiel: Spieglung an einer Geraden

Wir betrachten die Spiegelung von Vektoren an einer Geraden g…

Spiegelungen können durch Matrizen beschrieben werden…

$$S \cdot \vec{v} = \vec{v}'$$



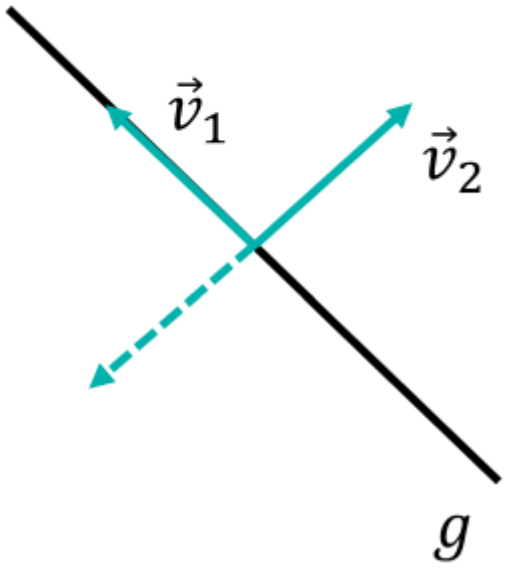
Eigenwerte und Eigenvektoren

Einführungsbeispiel: Spieglung an einer Geraden

Wir betrachten die Spiegelung von Vektoren an einer Geraden g…

Zwei Spezielle Vektoren:

Alle Vektoren, die auf der Geraden liegen oder senkrecht zu ihr stehen, werden auf sich selbst oder den Gegenvektor abgebildet.



$$S \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_1 = 1 \cdot \vec{v}_1$$

$$S \cdot \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 = -1 \cdot \vec{v}_2$$

Die speziellen Vektoren werden auf Vielfache von sich selbst abgebildet…

Einführungsbeispiel: Spieglung an einer Geraden

Wie bekommen wir die konkrete Matrix?

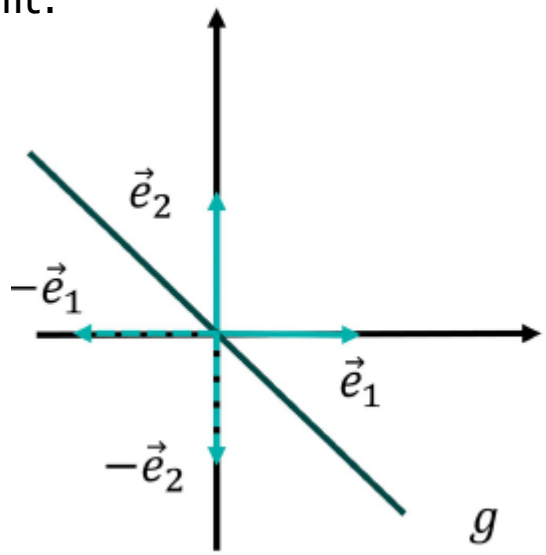
Wir bestimmen die Bilder der Standardbasisvektoren. Es gilt:

„Die Bilder der Basis sind die Spalten der Matrix“

$$S \cdot \vec{e}_1 = -\vec{e}_2$$

$$S \cdot \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$



Wie wir die speziellen Vektoren berechnen, sehen wir später…

Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine $n \times n$ Matrix. Dann bezeichnen wir $\lambda \in \mathbb{C}$ als Eigenwert der Matrix A, genau dann, wenn ein Eigenvektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$ gibt, der folgendes erfüllt:

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

Bemerkungen:

Eigenvektoren besitzen also die Eigenschaft, dass die Matrix A sie auf Vielfache ihrer selbst abbildet. Die Vielfachen sind dann die Eigenwerte.

Wir werden später bei der Berechnung sehen, dass Eigenwerte auch komplexwertig sein können, daher $\lambda \in \mathbb{C}$.

Da für den Nullvektor trivialerweise $A \cdot \vec{0} = \lambda \cdot \vec{0}$ für jeden Wert $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt, wird der Nullvektor bei der Definition explizit ausgenommen.

Eigenwerte können null sein: $\lambda = 0$. In diesem Fall ist die Matrix A singulär.

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Eigenwerte und Eigenvektoren

Einführungsbeispiel: Spieglung an einer Geraden

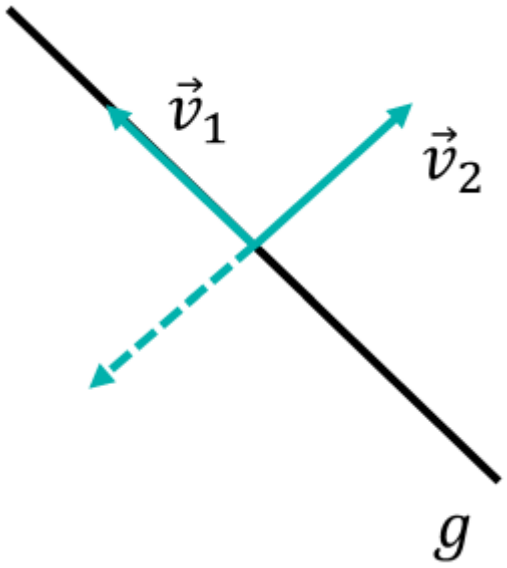
Wir betrachten die Spiegelung von Vektoren an einer Geraden g…

$$S \cdot \vec{v}_1 = 1 \cdot \vec{v}_1$$

Eigenwert $\lambda_1 = 1$

$$S \cdot \vec{v}_2 = -1 \cdot \vec{v}_2$$

Eigenwert $\lambda_2 = -1$



Die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ sind die Eigenvektoren der Spiegelmatrix…

Lineare Algebra

Eigenwerte und Eigenvektoren

Berechnung

Wie berechnen wir Eigenwerte?

Wir suchen einen Vektor $\vec{v}$ und eine Zahl λ sodass folgendes gilt…

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

Wir formen um…

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad A \cdot \vec{v} - \lambda \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (A - \lambda I) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

Einheitsmatrix:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir müssen ein lineares Gleichungs-system lösen…

Lineare Algebra

Eigenwerte und Eigenvektoren

Berechnung

Wir müssen das folgende, homogene, lineare Gleichungssystem lösen…

$$(A - \lambda I) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

Was wissen wir über die Lösbarkeit?

Der Nullvektor ist die einzige eindeutige Lösung.

Wenn wir eine nichttriviale Lösung, d.h. nicht den Nullvektor haben wollen, müssen wir nach nicht eindeutigen Lösungen suchen…

Das System ist nicht eindeutig lösbar, wenn die Matrix $A - \lambda I$ singulär ist. Dies ist der Fall, wenn die Determinante null ist…

$(A - \lambda I) \cdot \vec{v} = 0$ besitzt eine nichttriviale Lösung $\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda I) = 0$

Lineare Algebra

Eigenwerte und Eigenvektoren

Berechnung

Wir betrachten die folgenden Matrix als Beispiel…

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir setzen die Determinante gleich null und erhalten das charakteristische Polynom…

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0}_{\text{char. Polynom}}$$

Lösung:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 4 \quad \text{(Eigenwerte)}$$

Lineare Algebra

Eigenwerte und Eigenvektoren

Berechnung

Wir betrachten die folgenden Matrix als Beispiel…

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist singulär, daher ist ein Eigenwert gleich null.

Wir setzen die Determinante gleich null und erhalten das charakteristische Polynom…

$$\det(B - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 3\lambda = 0$$

Lösung:

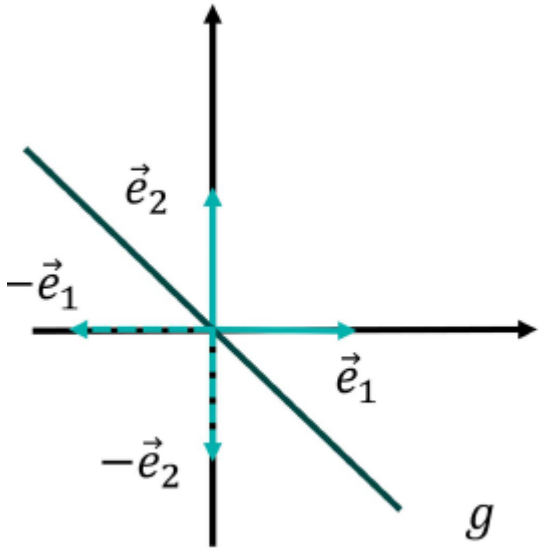
$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 3 \quad \text{(Eigenwerte)}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Einführungsbeispiel: Spieglung an einer Geraden

Die Spiegelung wird durch die folgende Matrix beschrieben…

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$



Wir berechnen die Eigenwerte…

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 1$$



Eigenwerte und Eigenvektoren

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Bestimmen Sie die Eigenwerte zu folgender Matrix…

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

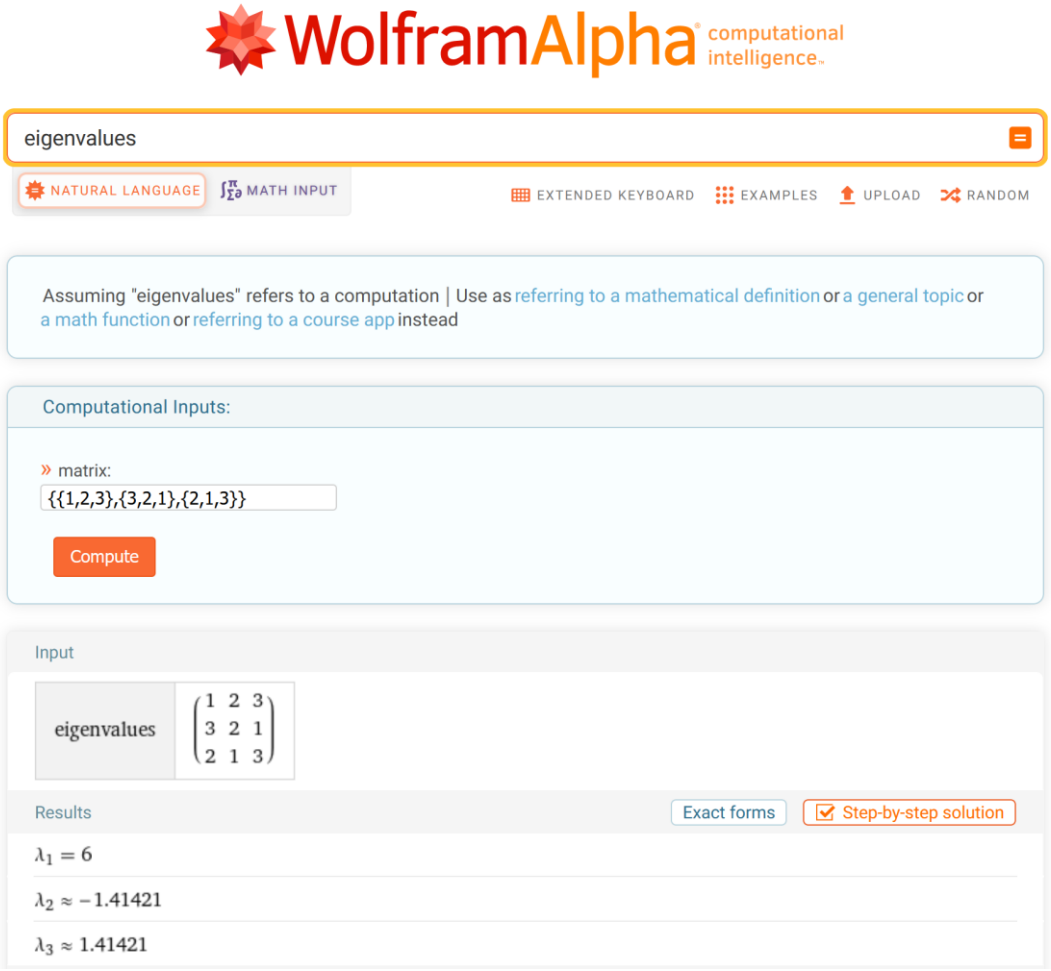
Lösung:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 3 \quad \text{(Eigenwerte)}$$

Lineare Algebra

Eigenwerte und Eigenvektoren

Berechnung mit dem Computer



Lineare Algebra

Eigenwerte und Eigenvektoren

Beispiel

Wir betrachten die folgende Matrix als weiteres Beispiel…

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung mit Wolframalpha…

$\lambda_1 = 3$ $\lambda_{2/3} = \pm i$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms können auch komplexwertig sein, daher können auch komplexe Eigenwerte vorkommen…

Eigenwerte und Eigenvektoren

Berechnung der Eigenvektoren

Wie können wir die Eigenvektoren berechnen?

Dazu zuerst eine Bemerkung…

Eigenwerte sind eindeutig bestimmt.

Eigenvektoren sind aber nur bis auf ihre Länge und Orientierung eindeutig bestimmt.

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \quad \Rightarrow \quad A \cdot (c \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (c \cdot \vec{v})$$

Auch das Vielfache ist Eigenvektor!

Eigenwerte und Eigenvektoren

Berechnung der Eigenvektoren

Wir betrachten das Beispiel von vorne…

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Eigenwerte:} \quad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 4$$

Wir setzen die Eigenwerte in die Definitionsgleichung ein…

$$(A - \lambda I) \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = \vec{0} \quad \text{(singuläres Gleichungssystem)}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = t \cdot \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \text{ ist Parameter}$$

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Wir betrachten das Beispiel von vorne…

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Eigenwerte:} \quad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 4$$

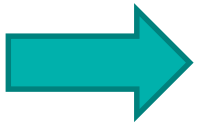
Bestimmen Sie einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$…

Lineare Algebra

Eigenwerte und Eigenvektoren

Anwendungsbeispiel: Hauptträgheitsachsen

Ein Körper rotiert um eine vorgegebene Achse. Dann gibt der Trägheitstensor den Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit an:



$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

Der Trägheitstensor I wird übrigens über ein Volumenintegral berechnet…

$$I_{ij} = \iiint_V \rho(\vec{x}) \cdot \left(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j\right) dV$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Anwendungsbeispiel: Hauptträgheitsachsen

Jeder Körper besitzt drei Achsen, um die er „leicht" rotieren kann. Es handelt sich um die Hauptträgheitsachsen.

Rotiert der Körper um eine dieser Achsen, reduziert sich der Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit auf eine einfach Multiplikation mit dem Trägheitsmoment.

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} = \lambda \cdot \vec{\omega}$$

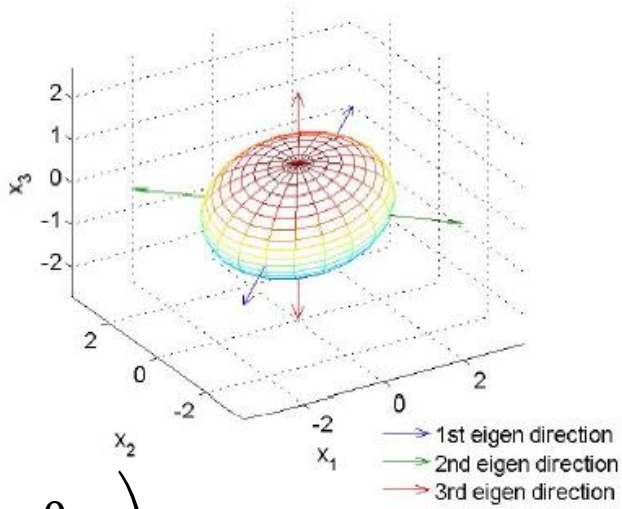
Die Hauptträgheitsachsen sind die Eigenvektoren des Trägheitstensors

Lineare Algebra

Eigenwerte und Eigenvektoren

Anwendungsbeispiel: Hauptträgheitsachsen

Wir betrachten die Rotation eines Ellipsoiden als Beispiel…



Trägheitstensor:

(Integration über Kugelkoordinaten)

$$I = \pi \cdot \begin{pmatrix} 20 & -20/3 & 0 \\ -20/3 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 104/3 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

stabile Rotationsachsen

$$\lambda_1 = \frac{40}{3}\pi \approx 41.88 \qquad \lambda_2 = \frac{80}{3}\pi \approx 83.77 \qquad \lambda_3 = \frac{104}{3}\pi \approx 108.9$$

Systeme von DGL‘s 1. Ordnung

Wir wissen aus Mathe 2, dass jede DGL oder jedes System höherer Ordnung in ein äquivalentes System von DGL‘s 1. Ordnung überführt werden kann (Stichwort: Zustandsraumdarstellung).

Beispiel:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = u(t) \quad \Rightarrow \quad y''(t) = -\frac{b}{a}y'(t) - \frac{c}{a}y(t) + \frac{1}{a}u(t)$$

Wir führen zwei Hilfsgrößen ein (passend zur Ordnung 2)…

$$x_1(t) = y(t)$$
$$x_2(t) = y'(t)$$

1x ableiten

$$x'_1(t) = y'(t) = x_2(t)$$
$$x'_2(t) = y''(t) = \underbrace{-\frac{c}{a}x_1(t) - \frac{b}{a}x_2(t) + \frac{1}{a}u(t)}_{\text{von der DLG}}$$

Systeme von DGL‘s 1. Ordnung

Ein lineares System von DGL‘s 1. Ordnung kann als Matrix-Vekotr-Produkt geschrieben werden…

Beispiel:

$$x'_1(t) = x_2(t)$$

$$x'_2(t) = -\frac{c}{a}x_1(t) - \frac{b}{a}x_2(t) + \frac{1}{a}u(t)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} \end{pmatrix} u(t)$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Systeme von DGL‘s 1. Ordnung

Für lineare, homogene DGL-Systeme mit der Form $\vec{y}' = A \cdot \vec{y}$, wobei $\vec{y}(t) = \left(y_1(t), y_2(t), \dots y_n(t)\right)^T$ die gesuchte Lösung ist und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, existiert ein Lösungsalgorithmus, der Eigenwerte und Eigenvektoren verwendet…

Wir berechnen die Eigenwerte λ und die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}$ der Systemmatrix A.

Für jeden reellwertigen Eigenwert λ und den zugehörigen Eigenvektor $\vec{v}$ addieren wir folgenden Term zur Lösung:

$$C \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot \vec{v}$$

Für komplexwertige Eigenwerte $\lambda = \alpha + i\beta$ und den zugehörigen Eigenvektor $\vec{v}$ addieren wir folgenden Term zur Lösung:

$$C_1 \cdot e^{\alpha t} \cdot (\mathrm{Re}(\vec{v}) \cos \beta t - \mathrm{Im}(\vec{v}) \sin \beta t) + C_2 \cdot e^{\alpha t} \cdot (\mathrm{Im}(\vec{v}) \cos \beta t + \mathrm{Re}(\vec{v}) \sin \beta t)$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Systeme von DGL's 1. Ordnung

Wir betrachten ein Beispiel…

$$\begin{pmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \\ y'_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 6 \\ 3 & -2 & -3 \\ -6 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren und Eigenwerte:

$$\lambda_{1,2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = -2 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung:

$$\vec{y}(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lineare Algebra

Eigenwerte und Eigenvektoren

Systeme von DGL's 1. Ordnung

Wir betrachten die Lösungmethoden für die beiden äquivalenten Systeme…

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Charakteristische Gleichung…

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Übertragungsfunktion Laplace…

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

Eigenwerte über char. Polynom…

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Anwednungsbeispiel: Fachwerkbrücke



Quelle: Wikipedia

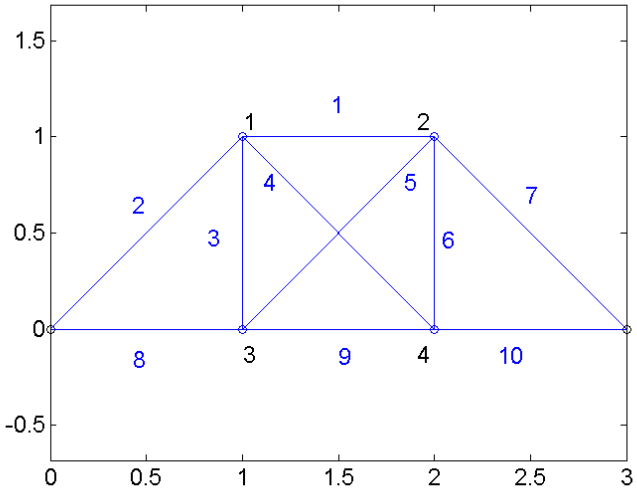
Wir führen eine mechanische Strukturanalyse zu einer Fachwerkbrücke durch…

Wir betrachten ein vereinfachtes Modell…

Wirkung der Gravitationskraft für das Modell:

Position: z_j
Verschiebung: x_j
Steifigkeitsmatrix: A
Grav. Kraft: F_G

$$Ax = F_G$$



Lineare Algebra

Eigenwerte und Eigenvektoren

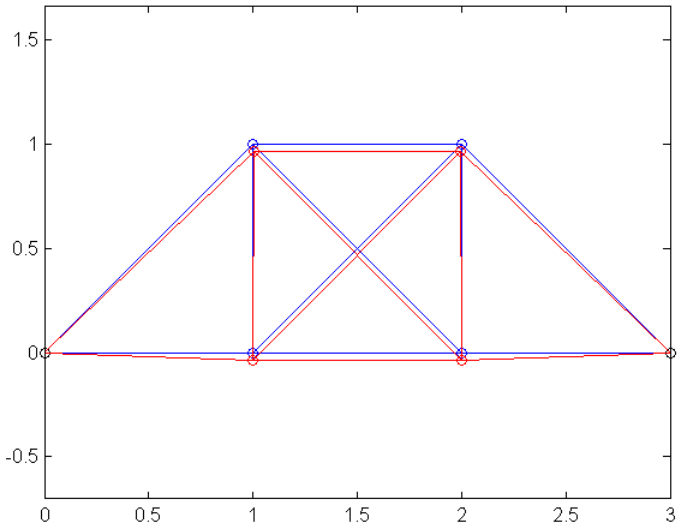
Anwednungsbeispiel: Fachwerkbrücke

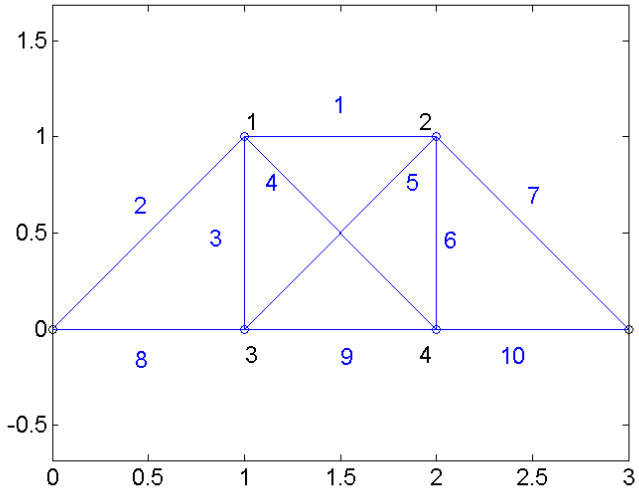
Wir führen eine mechanische Strukturanalyse zu einer Fachwerkbrücke durch…



Quelle: Wikipedia

Wirkung der Gravitationskraft für das Modell:





Lineare Algebra

Eigenwerte und Eigenvektoren

Anwednungsbeispiel: Fachwerkbrücke

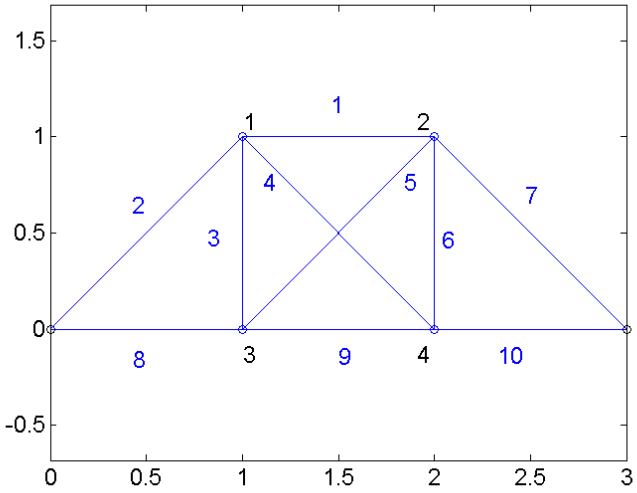
Wir führen eine mechanische Strukturanalyse zu einer Fachwerkbrücke durch…



Quelle: Wikipedia

Dynamisches Verhalten für das Modell:

$$m \cdot x''(t) + A \cdot x(t) = 0$$



Lösung:

$$x(t) = cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t\right) v$$

v Eigenvektor von A

λ Eigenwert von A

Lineare Algebra

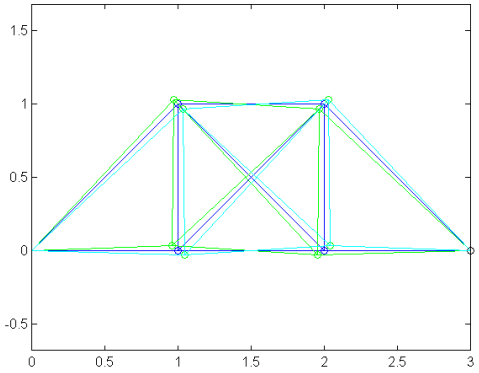
Eigenwerte und Eigenvektoren

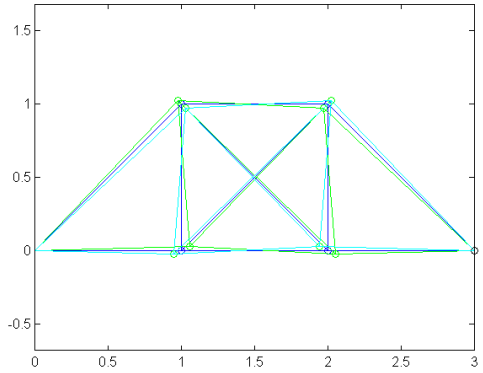
Anwednungsbeispiel: Fachwerkbrücke

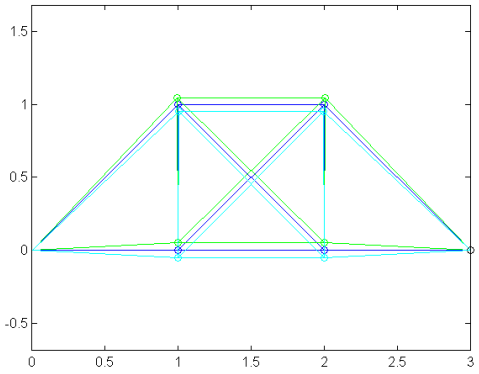
Visuelle Darstellung der Eigenschwingungen…

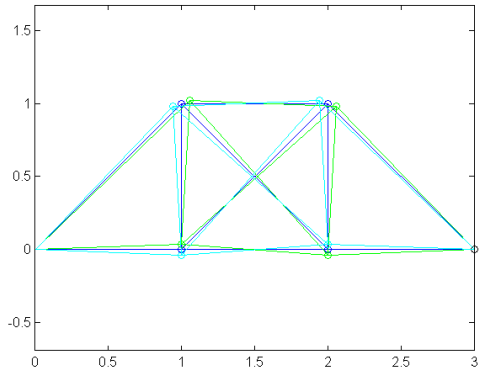


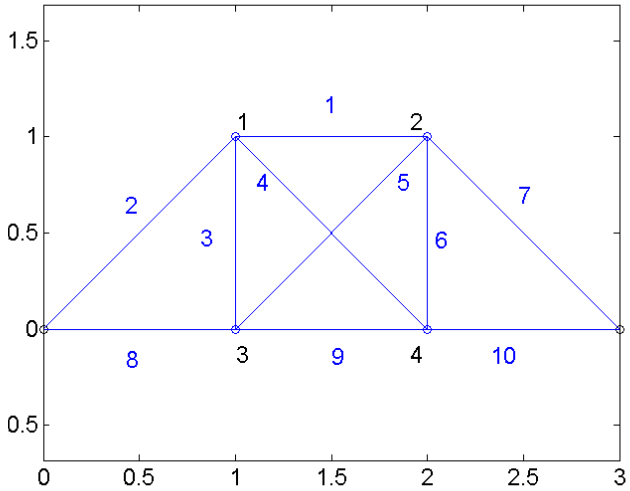
Quelle: Wikipedia











Hinweis:

Versuchen sie mal den Befehl „truss" in Matlab!

Lineare Algebra

Eigenwerte und Eigenvektoren

Nützliche Eigenschaften

Im Folgenden ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine $n \times n$ Matrix. Mit $\lambda \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir einen Eigenwert der Matrix A und mit $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ den zugehörigen Eigenvektor.

Invertierbare Matrizen

Ist A invertierbar mit der Inversen A^{-1}, dann ist $\frac{1}{\lambda}$ der Eigenwert von A^{-1} mit dem Eigenvektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Determinante

Wenn λ_i alle Eigenwerte der Matrix bezeichnen, gilt: $$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Hierbei werden die Eigenwerte entsprechend ihrer (algebraischen) Vielfachheit gezählt, d.h. doppelte Nullstellen des charakteristischen Polynoms werden auch doppelt gezählt.

Nützliche Eigenschaften (Symmetrische Matrizen)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wird symmetrisch genannt, wenn gilt: $a_{ij} = a_{ji}$

In diesem Fall stimmt A mit der Transponierten überein: $A = A^T$

Wenn wir komplexwertige Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ betrachten, sind hermitesche Matrizen interessant…

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt hermitesch, wenn gilt: $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$

In diesem Fall ist die Matrix also symmetrisch bzgl. der Hauptdiagonalen, bis auf komplexe Konjugation.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Nützliche Eigenschaften (Symmetrische Matrizen)

Für symmetrische bzw. hermitesche Matrizen gelten spezielle Eigenschaften, die vor allem in der Quantenmechanik nützlich sind…

Alle Eigenwerte einer symmetrischen (hermiteschen) Matrix sind reell.

Das Vorzeichen der Eigenwerte symmetrischer (hermitescher) Matrizen bestimmt die Definitheit der Matrix. Sind alle Eigenwerte positiv (negativ), ist die Matrix positiv definit (negativ definit).

Zu einer symmetrischen (hermiteschen) Matrix kann immer eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren gefunden werden. Insbesondere sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten immer orthogonal.

Nützliche Eigenschaften (Symmetrische Matrizen)

Wir betrachten ein Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Die Eigenwerte und Eigenvektoren lauten:

$$\lambda_1 = -1 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \lambda_1 = 3 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenvektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

Sie sind orthogonal:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (-1\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Nützliche Eigenschaften (Kommutierende Matrizen)

Für symmetrische Matrizen, die kommutieren, d.h. für die $A \cdot B = B \cdot A$ gilt, kann immer ein System gemeinsamer Eigenvektoren gefunden werden.

Es sei λ ein (einfacher) Eigenwert von A mit Eigenvektor $\vec{v}$. Dann gilt:

$$AB\vec{v} = BA\vec{v} = \lambda B\vec{v}$$

Damit ist auch $B\vec{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ für die Matrix A.

Da λ eine einfacher Eigenwert ist, muss $B\vec{v}$ ein Vielfaches von $\vec{v}$ sein, es gilt also:

$$B\vec{v} = \mu\vec{v}$$

Somit ist $\vec{v}$ auch Eigenvektor für die Matrix B, zum Eigenwert μ.

Näherungsweise Bestimmung (Gerschgorin Kreise)

Wir definieren zu einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die zugehörigen Gerschgorin Kreise:

$$S_i := S\left(a_{ii}, \sum_{i,i\neq j}^{n} |a_{ij}|\right) \qquad i = 1,2,\dots n \qquad \text{(zeilenweise)}$$

$$S_j := S\left(a_{jj}, \sum_{j,j\neq i}^{n} |a_{ij}|\right) \qquad j = 1,2,\dots n \qquad \text{(spaltenweise)}$$

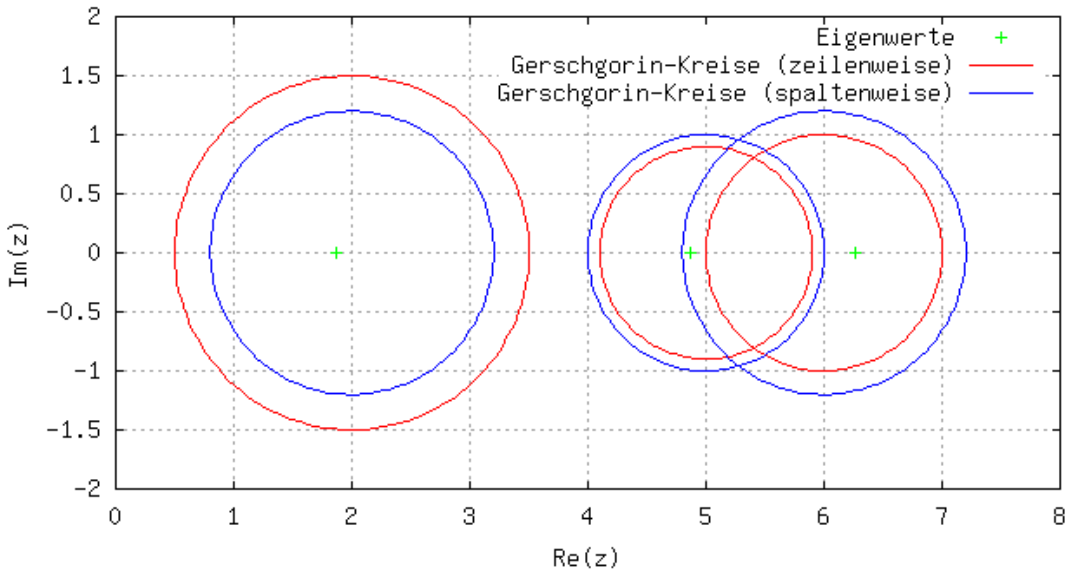
Bemerkung:

Das Diagonalelement bildet immer den Mittelpunkt des Kreises. Der Radius ergibt sich durch Aufsummieren der entsprechenden Elemente in der zugehörigen Zeile oder Spalte.

Näherungsweise Bestimmung (Gerschgorin Kreise)

Wir betrachten folgende Matrix als Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 5 & 0.7 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$



Die Eigenwerte liegen in den Kreisen!

Eigenwerte und Eigenvektoren

Näherungsweise Bestimmung (Gerschgorin Kreise)

Wir betrachten die symetrische Matrix als Beispiel:

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Da die symmetrische Matrix nur reelle Eigenwerte besitzen kann, genügt es Intervalle auf der reellen Achse zu betrachten.

Wir erhalten:

Mittelpunkt 8, mit Radius 1 → $[7,9]$

Mittelpunkt 7, mit Radius 0 → $[7,7]$

Mittelpunkt 5, mit Radius 1 → $[4,6]$

Vergleich mit den Eigenwerten:

$\lambda_1 = 4.6972$ $\lambda_2 = 7$ $\lambda_3 = 8.3028$

Näherungsweise Bestimmung (Gerschgorin Kreise)

Anwendung:

Wenn kein Gerschgorin Kreis den Ursprung enthält, kann $\lambda = 0$ kein Eigenwert sein. In diesem Fall ist die Matrix invertierbar (nichtsingulär).

Bei symmetrischen Matrizen, kann über die Gerschgorin Kreise auf die Definitheit geschlossen werden, wenn z.B. alle Kreise in der rechten Halbebene liegen. In diesem Fall müssen alle Eigenwerte positiv sein, d.h. die Matrix ist positiv definit.